

Solução dos exercícios do capítulo 2, pp. 31-32

Equações de um gás ideal

$$pV = NRT \quad U = NcT \quad \rightarrow \quad U = \frac{c}{R}pV$$

Exercício 1. Expansão isotérmica de um gás ideal. Trabalho:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = NRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = NRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Como a energia de um gás ideal só depende da temperatura, a energia não varia ao longo de um processo isotérmico, isto é, $\Delta U = 0$. Portanto $Q = W$. Num processo isotérmico, a variação de entropia vale $\Delta S = Q/T$ de modo que

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{W}{T} = NR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Exercício 2. Expansão adiabática de um gás ideal. Ao longo de uma adiabática

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma \quad \gamma = \frac{c+R}{c}$$

Trabalho

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = \frac{1}{-\gamma+1} p_1 V_1^\gamma (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1})$$

$$W = \frac{1}{-\gamma+1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{c}{R} (p_1 V_1 - p_2 V_2) \quad p_2 = p_1 V_1^\gamma V_2^{-\gamma}$$

Alternativamente, podemos usar o fato de que o calor trocado é nulo e que portanto $\Delta U = -W$. Como

$$\Delta U = \frac{c}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

obtem-se diretamente o resultado acima para W . A variação da entropia é nula.

Exercício 3. Expansão isobárica de um gás ideal. Ao longo de uma isobárica o trabalho vale

$$W = p(V_2 - V_1)$$

enquanto a variação da energia vale

$$\Delta U = \frac{c}{R}pV_2 - \frac{c}{R}pV_1 = \frac{c}{R}p(V_2 - V_1)$$

Calor trocado:

$$Q = \Delta U + W = \frac{c + R}{R}p(V_2 - V_1)$$

A partir de $U = (c/R)pV$ concluímos que, ao longo de uma isobárica

$$dU = \frac{c}{R}pdV$$

e que portanto

$$dQ = dU + dW = \frac{c}{R}pdV + pdV = \frac{c + R}{R}pdV$$

Logo

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = (c + R) \int \frac{pdV}{RT} = N(c + R) \int \frac{dV}{V} = N(c + R) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

onde utilizamos $p/RT = N/V$.

Exercício 4. Compressão isocórica de um gás ideal. Ao longo de uma isocórica o trabalho é nulo de modo que $dQ = dU$. A partir de $U = (c/R)pV$ obtemos

$$dQ = dU = \frac{c}{R}Vdp$$

pois V é constante ao longo de uma isocórica de modo que

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{cVdp}{RT} = Nc \int \frac{dp}{p} = Nc \ln \frac{p_2}{p_1}$$

onde utilizamos $V/RT = N/p$.

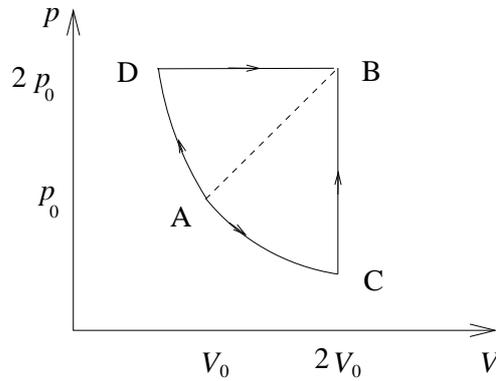


Figure 1: Exercício 5.

Exercício 5.

$$V_C = 2V_0 \quad p_D = 2p_0$$

$$p_0 V_0 = 2p_0 V_D = p_C 2V_0 \quad \rightarrow \quad V_D = \frac{1}{2}V_0 \quad p_C = \frac{1}{2}p_0$$

Ao longo do processo isotérmico não há variação da energia (gás ideal). Logo

$$Q_{A \rightarrow C} = W_{A \rightarrow C} = NRT \ln \frac{V_C}{V_A} = NRT \ln 2$$

$$Q_{A \rightarrow D} = W_{A \rightarrow D} = NRT \ln \frac{V_D}{V_A} = NRT \ln \frac{1}{2} = -NRT \ln 2$$

$$W_{C \rightarrow B} = 0 \quad Q_{C \rightarrow B} = U_B - U_C = \frac{c}{R}(p_B V_B - p_C V_C) = 3\frac{c}{R}p_0 V_0$$

$$W_{D \rightarrow B} = p_D(V_B - V_D) = 2p_0(2V_0 - \frac{1}{2}V_0) = 3p_0 V_0$$

$$Q_{D \rightarrow B} = (U_B - U_D) + W_{D \rightarrow B} = 3\frac{c}{R}p_0 V_0 + 3p_0 V_0 = 3\frac{c+R}{R}p_0 V_0$$

Exercício 6. Ao longo de uma adiabática usamos o resultado $pV^\gamma = \text{const}$ para obter

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \quad p_A V_A^\gamma = p_D V_D^\gamma \quad \rightarrow \quad \frac{p_A V_A^\gamma}{p_B V_B^\gamma} = \frac{p_D V_D^\gamma}{p_C V_C^\gamma}$$

Ao longo de uma isoterma usamos o resultado $pV = \text{const}$ para obter

$$p_A V_A = p_B V_B \quad \rightarrow \quad \frac{p_A}{p_B} = \frac{V_B}{V_A}$$

$$p_C V_C = p_D V_D \quad \rightarrow \quad \frac{p_D}{p_C} = \frac{V_C}{V_D}$$

Substituindo os dois últimos resultados na primeira, obtém-se

$$\frac{V_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} = \frac{V_D^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}} \quad \rightarrow \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

$$Q_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} = NRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} \quad \Delta U = 0$$

$$Q_{B \rightarrow C} = 0 \quad W_{B \rightarrow C} = U_B - U_C = \frac{c}{R}(p_B V_B - p_C V_C)$$

$$Q_{C \rightarrow D} = W_{C \rightarrow D} = NRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} \quad \Delta U = 0$$

$$Q_{D \rightarrow A} = 0 \quad W_{D \rightarrow A} = U_D - U_A = \frac{c}{R}(p_D V_D - p_A V_A)$$

Notar que $W_{B \rightarrow C} = -W_{D \rightarrow A}$, ou seja, os trabalhos desenvolvidos ao longo das adiabáticas são iguais em módulo. Logo o trabalho total vale

$$W = W_{A \rightarrow B} + W_{C \rightarrow D} = Q_{A \rightarrow B} + Q_{C \rightarrow D}$$

Rendimento

$$\eta = \frac{W}{Q_{A \rightarrow B}} = 1 + \frac{Q_{C \rightarrow D}}{Q_{A \rightarrow B}} = 1 - \frac{T_2 \ln(V_C/V_D)}{T_1 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

A última igualdade segue em virtude do resultado $(V_C/V_D) = (V_B/V_A)$.

Exercício 7. Para calcular a eficiência basta determinar $Q_{A \rightarrow B}$ e $Q_{C \rightarrow D}$ ao longo das duas isobáricas pois não há calor trocado ao longo das adiabáticas. A eficiência é dada por

$$\eta = \frac{W}{Q_{A \rightarrow B}} = \frac{Q_{A \rightarrow B} + Q_{C \rightarrow D}}{Q_{A \rightarrow B}} = 1 + \frac{Q_{C \rightarrow D}}{Q_{A \rightarrow B}}$$

$$Q_{A \rightarrow B} = U_B - U_A + W_{A \rightarrow B} = \frac{c + R}{R} p_A (V_B - V_A)$$

$$Q_{C \rightarrow D} = U_D - U_C + W_{C \rightarrow D} = \frac{c + R}{R} p_C (V_D - V_C)$$

$$\eta = 1 - \frac{p_C (V_C - V_D)}{p_A (V_B - V_A)}$$

Mas

$$p_A V_A^\gamma = p_C V_D^\gamma \quad p_A V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$\frac{p_A}{p_C} = \frac{V_D^\gamma}{V_A^\gamma} = \frac{V_C^\gamma}{V_B^\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B}$$

Usando esses resultados obtém-se

$$\eta = 1 - \frac{p_C V_C}{p_A V_B} = 1 - \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1}$$

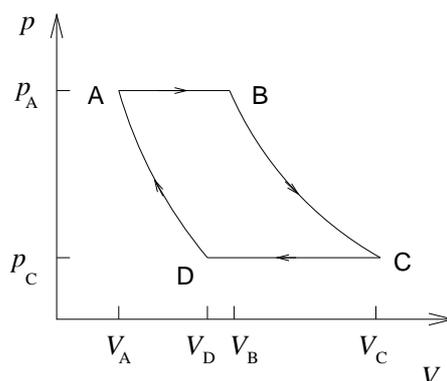


Figure 2: Exercício 7, ciclo Brayton-Joule.

Exercício 8.

Para calcular a eficiência basta determinar $Q_{A \rightarrow B}$ ao longo da isobárica e $Q_{C \rightarrow D}$ ao longo da isocórica pois não há calor trocado ao longo das adiabáticas. A eficiência é dada por

$$\eta = \frac{W}{Q_{A \rightarrow B}} = \frac{Q_{A \rightarrow B} + Q_{C \rightarrow D}}{Q_{A \rightarrow B}} = 1 + \frac{Q_{C \rightarrow D}}{Q_{A \rightarrow B}}$$

$$Q_{A \rightarrow B} = U_B - U_A + W_{A \rightarrow B} = \frac{c + R}{R} p_A (V_B - V_A)$$

$$Q_{C \rightarrow D} = U_D - U_C = \frac{c}{R} (p_D - p_C) V_C$$

$$\eta = 1 - \frac{c(p_C - p_D)V_C}{(c + R)p_A(V_B - V_A)}$$

Notar que as seis grandezas p_A , p_C , p_D , V_A , V_B e V_C não são independentes mas estão relacionadas entre si pelas equações

$$\frac{p_D}{p_C} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma \quad \frac{p_A}{p_D} = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^\gamma \quad \frac{p_A}{p_C} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma$$

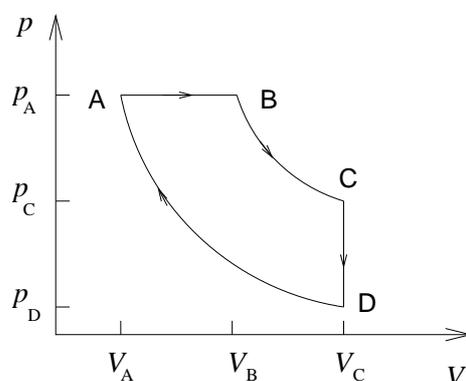


Figure 3: Exercício 8, ciclo Diesel.

Exercício 9. Para o processo adiabático:

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma \quad \rightarrow \quad \frac{p_B}{p_C} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^\gamma$$

Para os três estados A , B e C temos

$$p_C V_B = NRT_A \quad p_B V_B = NRT_B \quad p_C V_C = NRT_C$$

de onde obtemos

$$\frac{p_B}{p_C} = \frac{T_B}{T_A} \quad \frac{V_C}{V_B} = \frac{T_C}{T_A}$$

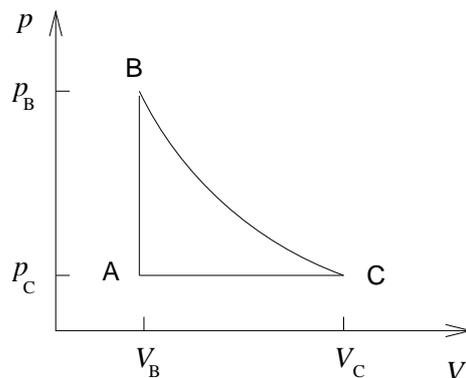


Figure 4: Exercício 9.

que substituído na primeira relação dá

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{T_C}{T_A}\right)^\gamma \quad \rightarrow \quad T_C^\gamma = T_B T_A^{\gamma-1}$$

Exercício 10. Numa expansão livre de um gás a energia interna permanece invariante. Se o gás for ideal, a energia depende apenas da temperatura. Portanto, a temperatura também permanece invariante, isto é, o estado final e o inicial têm a mesma temperatura. Para determinar a variação da entropia podemos utilizar qualquer processo quase-estático que ligue os pontos final e inicial. O mais apropriado é o processo isotérmico para o qual $\Delta S = Q/T$. Como não há variação da energia, $Q = W$ e

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p dV = NRT \int_{V_0}^{2V_0} \frac{1}{V} dV = NRT(\ln 2V_0 - \ln V_0) = NRT \ln 2$$

Portanto

$$\Delta S = NR \ln 2$$

Exercício 11. A reta que passa pelo ponto A e possui inclinação $-\alpha < 0$ é descrita pela equação

$$p = p_A - \alpha(V - V_A)$$

O trabalho realizado pelo gás ideal ao longo do processo descrito por essa reta é dado por

$$W = \int_{V_A}^V p dV = \int_{V_A}^V [p_A - \alpha(V - V_A)] dV = p_A(V - V_A) - \frac{1}{2}\alpha(V - V_A)^2$$

A variação de energia vale

$$\Delta U = \frac{c}{R}(pV - p_A V_A) = \frac{c}{R}[p_A V - \alpha(V - V_A)V - p_A V_A]$$

que pode ser escrito como

$$\Delta U = \frac{c}{R}[(p_A - \alpha V_A)(V - V_A) - \alpha(V - V_A)^2]$$

Portanto o calor trocado $Q = \Delta U + W$ é dado por

$$Q = a(V - V_A) - \frac{b}{2}(V - V_A)^2$$

onde a e b são constantes definidas por

$$a = \frac{c}{R}(p_A - \alpha V_A) + p_A \quad b = \alpha\left(\frac{2c}{R} + 1\right)$$

A variação da entropia é calculada a partir da expressão da entropia de um gás ideal, equação (2.43),

$$\Delta S = N(c + R) \ln \frac{V}{V_A} + Nc \ln \frac{p}{p_A} = N(c + R) \ln \frac{V}{V_A} + Nc \ln \frac{p_A - \alpha(V - V_A)}{p_A}$$

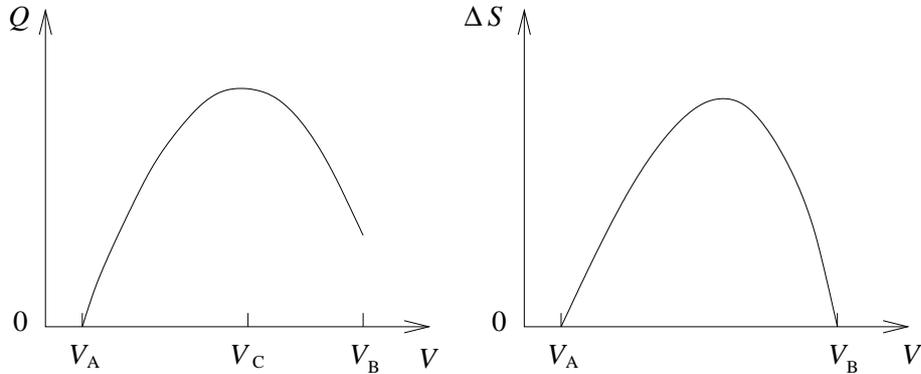


Figure 5: Exercício 11.

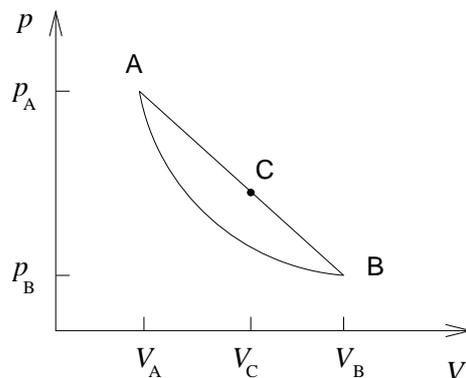


Figure 6: Exercício 11 e 12.

Exercício 12. Num ciclo o trabalho total é igual ao calor trocado total que por sua vez é igual ao calor trocado $Q_{A \rightarrow B}$ ao longo do processo descrito pelo segmento de reta AB pois ao longo da adiabática não há calor trocado. De acordo com o exercício anterior

$$W = Q_{A \rightarrow B} = Q = a(V_B - V_A) - \frac{b}{2}(V_B - V_A)^2$$

Para determinar V_B basta lembrar que ao longo de uma adiabática pV^γ é constante e portanto

$$\frac{p_B}{p_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma \quad p_B = p_A - \alpha(V_B - V_A)$$

Alternativamente, essa mesma relação pode ser obtida impondo $\Delta S = 0$ no resultado obtido no exercício anterior, já que $S_B = S_A$.

Para determinar o calor recebido, observamos que do ponto A até um certo ponto, que denominamos C, o gás recebe calor e que de C até B ele cede calor, como se vê no gráficos das figura 5 e 6. O ponto C é tal que $dQ/dV = 0$ ou seja

$$V_C - V_A = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad Q_{A \rightarrow C} = \frac{a^2}{2b}$$

A eficiência é dada por $\eta = W/Q_{A \rightarrow C}$.

Exercício 12. No diagrama $T - S$, um ciclo de Carnot é representado por um retângulo cujos lados são paralelos aos dois eixos do diagrama. Um

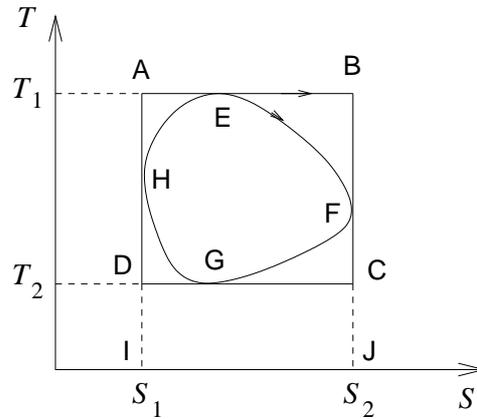


Figure 7: Exercício 12.

ciclo quase-estático qualquer EFGHE é representado por um caminho fechado como mostrado no figura 7. A maior temperatura alcançada pela substância que percorre o ciclo é T_1 e a menor temperatura é T_2 . A menor entropia define S_1 e a maior entropia define S_2 . Essas duas temperaturas e essas duas entropias definem o ciclo de Carnot ABCDA mostrado na figura 7.

Nesse diagrama o calor recebido durante o processo é a igual à área $\mathcal{A}(IHEFJ)$ enquanto o calor cedido q_c é igual à área $\mathcal{A}(IHGFJ)$. A eficiência vale pois

$$\eta = 1 - \frac{\mathcal{A}(IHGFJ)}{\mathcal{A}(IHEFJ)}$$

Por outro lado, o calor recebido durante o ciclo de Carnot é igual à área $\mathcal{A}(IDABCJ)$ enquanto o calor cedido é igual à área $\mathcal{A}(IDCJ)$. A eficiência do ciclo de Carnot vale portanto

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{\mathcal{A}(IDCJ)}{\mathcal{A}(IDABCJ)}$$

Para mostrar que $\eta \leq \eta_{\text{Carnot}}$, devemos mostrar que

$$\frac{\mathcal{A}(IHGFJ)}{\mathcal{A}(IHEFJ)} \geq \frac{\mathcal{A}(IDCJ)}{\mathcal{A}(IDABCJ)}$$

Mas isso sempre se verifica pois, a partir do gráfico da figura 7 conclui-se que as áreas satisfazem as relações

$$\mathcal{A}(IHGFJ) \geq \mathcal{A}(IDCJ) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}(IHEFJ) \leq \mathcal{A}(IDABCJ)$$